

1. Se considera el conjunto $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y\}$ con las operaciones de suma $+$ y producto por un número usuales de $\mathbb{R}^2$. Estudie si se trata de un espacio vectorial.

En el caso de multiplicación, podemos tener un vector $v \in V$, tal que $x \geq y$ y que al multiplicarlo por un nº negativo, éste no esté en V y, por tanto, no sería operación interna:

Ej: $v = (4, 2)$ Cumple; $x \geq y$. $-1 \cdot v = (-4, 2)$ No cumple; $x < y$

2. Se considera el espacio vectorial $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$. Estudie si los siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales:

- a) $U_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : ax + by + cz + dt = 1, a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$.
- b) $U_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : ax + by + cz + dt = 0, a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$.
- c) U_3 es el conjunto formado por las soluciones del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y - t = 0 \end{cases}$$

a) NO, ya que todos los subespacios deben contener el vector $\vec{0}$

b) $(U_2, +)$ grupo abeliano

- Interna $\rightarrow \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in U_2 \quad \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2, t_1 + t_2)$

$$a \cdot (x_1 + x_2) + b \cdot (y_1 + y_2) + c \cdot (z_1 + z_2) + d \cdot (t_1 + t_2) = 0 \quad ; \quad \underbrace{ax_1 + by_1 + cz_1 + dt_1}_{=0} + \underbrace{ax_2 + by_2 + cz_2 + dt_2}_{=0} = 0 \quad \checkmark$$

- Asociativa $\rightarrow$ Suma de 0 $\checkmark$ - Conmutativa $\rightarrow \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \quad \checkmark$

- Neutro $\rightarrow \vec{v} + \vec{0} = \vec{v} \quad \checkmark$ - Inverso $\vec{v}_1 + \vec{v} = \vec{0} \quad \vec{v} = (-x_1, -y_1, -z_1, -t_1) \quad \checkmark$

• Cumple que $\lambda \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \lambda \vec{v} + \lambda \vec{w}$ y que $\vec{v}(\lambda + \mu) = \vec{v}\lambda + \vec{v}\mu$

$$\lambda \vec{v} = (\lambda x, \lambda y, \lambda z, \lambda t) \rightarrow a\lambda x + b\lambda y + c\lambda z + d\lambda t = 0 \quad ; \quad \lambda \cdot \underbrace{(ax + by + cz + dt)}_{=0} = 0 \quad \checkmark$$

• Cumple que $(\lambda \mu) \vec{v} = \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{v}) \quad \checkmark$

c) $(U_3, +)$ grupo abeliano

- Interna $\rightarrow \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in U_3 \quad ; \quad \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2, t_1 + t_2)$

$$(x_1 + x_2) + (z_1 + z_2) = 0 \quad ; \quad \underbrace{x_1 + z_1}_{=0} + \underbrace{x_2 + z_2}_{=0} = 0 \quad \checkmark$$

- Asociativa $\rightarrow$ Suma de 0 $\checkmark$ - Conmutativa $\rightarrow \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \quad \checkmark$

- Neutro $\rightarrow \vec{v} + \vec{0} = \vec{v} \quad \checkmark$ - Inverso $\vec{v}_1 + \vec{v} = \vec{0} \quad \vec{v} = (-x_1, -y_1, -z_1, -t_1) \quad \checkmark$

• Cumple que $\lambda \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \lambda \vec{v} + \lambda \vec{w}$ y que $\vec{v}(\lambda + \mu) = \vec{v}\lambda + \vec{v}\mu$

$$\lambda x + \lambda z = 0$$

• Cumple que $(\lambda \mu) \vec{v} = \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{v}) \quad \checkmark$

3. Se considera el espacio vectorial $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ de los polinomios de coeficientes reales de cualquier grado con la suma de polinomios y el producto por un número usuales. Estudie si los siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales:

a) $U_1 = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] : p(0) = 1\}$.

b) $U_2 = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] : p'(1) = 0\}$.

c) $U_3 = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] : p(-x) = -p(x)\}$.

a) $(U_1, +)$ grupo abeliano

- Interna $\rightarrow p(x), q(x) \in U_1 \quad p(x) + q(x) \in U_1 \quad p(x) + q(x) = 1 + 1 = 2 \quad \times$

b) $(U_2, +)$ grupo abeliano

- Interna $\rightarrow p(x), q(x) \in U_2 \quad p(x) + q(x) \in U_2 \quad p'(x) + q'(x) = 0 + 0 = 0 \quad \checkmark$

- Asociativa $\rightarrow$ Suma de 0 $\checkmark$ - Conmutativa $\rightarrow p'(x) + q'(x) = q'(x) + p'(x) \quad 0 = 0 \quad \checkmark$

- Neutro $\rightarrow p(x) + 0 = p(x) \quad \checkmark$ - Inverso $\rightarrow p(x) + i(x) = 0 \quad i(x) = -p(x) \quad \checkmark$

• Cumple que $\lambda \cdot (p(x) + q(x)) = \lambda p(x) + \lambda q(x)$ y que $p(\lambda)(\lambda + \mu) = p(x)\lambda + p(x)\mu$
 $\lambda \cdot 0 = 0 \quad \checkmark$ $\checkmark$

• Cumple que $(\lambda \mu) \vec{v} = \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{v}) \quad \checkmark$

4. En el espacio vectorial $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, se considera el conjunto $S = \{(1, -1, 0), (0, 0, 1)\}$. Demuestre que $\langle S \rangle$ es el plano dado por la ecuación $x + y = 0$.

$\langle S \rangle \equiv x + y = 0$

$\forall \in \langle S \rangle : \alpha(1, -1, 0) + \beta(0, 0, 1) = (\alpha, -\alpha, \beta)$

Como los vectores pertenecientes a $\langle S \rangle$ siempre su x cumple que es igual a $-y$, es equivalente al plano $x + y = 0$

6. Sea $(V, +, \cdot)$ un espacio vectorial real. Si $u, v, w \in V$ son linealmente independientes, demuestre que también lo son $u + v, v + w$ y $u + w$.

$\lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{v} + \lambda_3 \vec{w} = 0$ por definición.
 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

Para comprobar que lo son:

$\mu_1(\vec{u} + \vec{v}) + \mu_2(\vec{v} + \vec{w}) + \mu_3(\vec{u} + \vec{w}) = 0 \quad ; \quad (\mu_1 + \mu_3)\vec{u} + (\mu_1 + \mu_2)\vec{v} + (\mu_2 + \mu_3)\vec{w} = 0$
 $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0 \quad \checkmark$

7. Se considera el espacio vectorial $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$. Determine, en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$, si el conjunto $\{(1, 1, 0), (1, a, 1), (0, 1, 1)\}$ es o no una base.

Base si: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\text{rg } A = 3$; $\det A = a - 2$

$a = 2$ $\text{rg } A = 2$ X
 $a \neq 2$ $\text{rg } A = 3$ ✓

8. Se considera el espacio vectorial $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$. Dado el conjunto $S = \{(1, 0, 0, 1), (0, 1, -1, 0)\}$, extienda S a una base.

Para que sea base, $\text{rg } A = 4$. Por tanto

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$ Añadimos dos vects independientes

9. Se considera el espacio vectorial $(\mathbb{R}_2[x], +, \cdot)$ de los polinomios de coeficientes reales de grado a lo sumo 2. Demuestre que el conjunto $\{1 + x, 1 - x, 1 + x + x^2\}$ es una base.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\det A = -1 - (-1) = -2$ $\text{rg } A = 3$ Si es base

10. Se considera el espacio vectorial $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ de las matrices cuadradas de orden 2. Demuestre que el conjunto

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

es una base, que se conoce como la *base canónica* de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ Sist Libre ✓

$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; $a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}_{B_2}$ Sist Gen. ✓

11. Se considera el espacio vectorial $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$. Sea el subespacio definido por las ecuaciones

$$\begin{array}{l} \text{ECS.} \\ \text{Cartesianas} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x + z = 0 \\ y - t = 0 \end{array} \right.$$

$$\dim U = 2$$

Obtenga una base de este subespacio y su dimensión.

$$\left. \begin{array}{l} z = \lambda \\ t = \mu \\ x = -\lambda \\ y = \mu \end{array} \right\} \text{Paramétricas}$$

$$v \in U \quad \vec{v} = (x, y, z, t) = \lambda \cdot (-1, 0, 1, 0) + \mu (0, 1, 0, 1)$$

$$B_u = \{(-1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1)\}$$